MA'RUZA

FUNKSIYA TUSHUNCHASI. SONLI KETMA-KETLIK VA UNING LIMITI

Ma'ruza rejasi

1. Haqiqiy son va uning absolyut qiymati.
2. Funksiya tushunchasi.
3. Juft, toq, chegaralangan, davriy va monoton funksiyalar.
4. Elementar va asosiy elementar funksiyalar
5. Sonli ketma-ketlik va uning limiti.

Tayanch so'z va iboralar: haqiqiy son; absolyut qiymat (modul); funksiya va argument; funksiyaning aniqlanish sohasi, qiymatlar to'plami, grafigi; juft, toq, davriy, chegaralangan funksiyalar; sonli ketma-ketlik; o'suvchi, kamayuvchi, monoton, chegaralangan ketma-ketliklar; ketma-ketlikning limiti.

1. HAQIQIY SON VA UNING ABSOLYUT QIYMATI

Haqiqiy sonning ta'rifi

Ta'rif. *Haqiqiy son* deb har qanday cheksiz o'nli kasrga aytiladi. Bunda butun son va chekli o'nli kasrni ham 0 davrli cheksiz o'nli kasr deb qaraymiz. Davriy cheksiz o'nli kasr ratsional son, davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasr irratsional son deyiladi. Ratsional sonni p/q ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda p va q butun sonlar, $q \neq 0$.

Masalan: -3=-3,(0); $\frac{1}{2}$=0,5=0,5(0); 4,4(6); -2,13(14); 23,32(21) - ratsional sonlar;

$\sqrt{2}$ =1,4142136...; π=3,14159...; lg3=0,47712...; 0,1010010001... - irratsional sonlardir

.

Haqiqiy son absolyut qiymatining ta'rifi

Ta'rif. a haqiqiy sonning absolyut qiymati yoki moduli deb

$$|a| = \begin{cases} a, & agar \quad a > 0 \quad bo`lsa, \\ 0, & agar \quad a = 0 \quad bo`lsa, \\ -a, & agar \quad a < 0 \quad bo`lsa \end{cases}$$

kabi aniqlanuvchi nomanfiy songa aytiladi.

Masalan: |3| = 3; |12,5| = 12,5; |0| = 0; |-32| = 32; |-0,178| =0,178.

Haqiqiy sonning absolyut qiymatining xossalari:

1. $|a| = |-a|$. 2. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$. 3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$. 5. $|a+b| \leq |a| + |b|$. 6. $|a-b| \geq |a| - |b|$.

5. $|a| \geq b \Leftrightarrow a > b$ yoki $a \leq -b$, agar $b > 0$ va $a \in R$, agar $b \leq 0$.

Sonli oraliqlar

$a \leq x \leq b$ ni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami *[a, b]* kesma, segment yoki yopiq oraliq deyiladi. Shu kabi:

$a < x < b$ to'plam - (a, b) interval yoki ochiq oraliq;

$a < x \leq b$ *va* $a \leq x < b$ lar - $(a, b]$ va $[a, b)$ yarim ochiq oraliqlar;

$-\infty < x < a$, $b < x < +\infty$, $-\infty < x < +\infty$ lar esa $(-\infty, a)$, (b, ∞), $(-\infty, +\infty)$ cheksiz oraliqlardir.

$-\infty < x < 0$ yoki $R_- = (-\infty, 0)$ - barcha manfiy haqiqiy sonlar to'plami;

$0 < x < +\infty$ yoki $R_+ = (0, +\infty)$ – barcha musbat haqiqiy sonlar to'plami;

$-\infty < x < +\infty$ *yoki* $R = (-\infty, +\infty)$ - barcha haqiqiy sonlar to'plamidir.

Quyidagilar o'rinli:

$|x|<a$, $a>0$ bo`lsa $-a<x<a \Leftrightarrow x\in(-a;\ a)$

$|x|>a$, $a>0$ bo`lsa $x>a$ yoki $x<-a \Leftrightarrow x\in(-\infty;\ -a)\cup(a;\ +\infty)$

$|x|\le a$, $a>0$ bo`lsa $-a\le x\le a \Leftrightarrow x\in[-a;\ a]$

$|x|\ge a$, $a>0$ bo`lsa $x\ge a$ yoki $x\ge -a \Leftrightarrow x\in(-\infty;\ -a]\cup[a;+\infty)$.

Kvantorlar

$x\in X$ - x X to'plamning elementi; $x\notin X$ - x X to'plamning elementi emas;

$\forall x\in X$ - X to'plamga tegishli barcha x elementlar(uchun);

$\exists\, x\in X$ - X to'plamga tegishli kamida bitta x element(mavjud) deganini bildiradi.

$\in$, $\forall$, $\exists$ belgilar mos ravishda tegishlilik, umumiylik, mavjudlik kvantorlari deyiladi.

Shuningdek:

$A \Leftrightarrow B$ - A va B mulohazalarning teng kuchli ekanini;

$A \Rightarrow B$ - A mulohazadan B mulohazaning kelib chiqishini bildiradi.

1-misol

Tengsizlikni yeching. $|x-5|<4$

Δ $|x-5|<4 \Leftrightarrow -4<x-5<4 \Leftrightarrow 1<x<9 \Leftrightarrow (1;\ 9)$. Javobi: (1; 9).

Bu tengsizlikning **Maple** da yechilishi quyidagicha: **>solve(abs(x-5)<4, x);**

Bu yerda solve(f(x),x) – f(x) tenglama(yoki tengsizlik)ni x o'zgaruvchiga nisbatan yechish funksiyasidar. Bu funksiyaning qiymatlari tenglamaning (yoki tengsizlikning) yechimlaridan iborat.

Javobi: RealRange(Open(1), Open(9)) .

RealRange - oraliqning haqiqiy sonlardan iborat ekanini, Open - ochiq ekanini bildiradi, ya'ni bu yuqoridagi *(1; 9)* ochiq oraliq demakdir.

▲

2-misol

Tengsizlikni yeching. $|x+2|+|x-2|\le 10$

Δ 1) $x\le -2$ da $-(x+2)-(x-2)\le 10$; $-2x\le 10$; $x\ge -5$. $x\in[-5;-2]$

2) $-2<x<2$ da $x+2-(x-2)\le 10$; $0\le 6$; $(-2;2)$.

3) $x\ge 2$ da: $x+2+x-2\le 10$; $x\le 5$; $2\le x\le 5$; $[2;5]$

Bu yechimlarni birlashtiramiz: $[-5;\ -2]\cup[-2;\ 2]\cup[2;\ 5]=[-5;\ 5]$. Javobi: [-5; 5]

3-misol

Tengsizlikni yeching. $|x^2-2x-3|>x^2-2x-3$

Δ $|x^2-2x-3|>x^2-2x-3$; $x^2-2x-3<0$; $(x-3)(x+1)<0$; Javobi: (-1; 3).

4-misol

Tenglamani yeching. $|2x+3|=x^2$

Δ $|2x+3|=x^2$; $x^2=\pm(2x+3)$;

1) $x^2=2x+3$; $x^2-2x-3=0$; $x_1=-1$; $x_2=3$

2) $x^2=-(2x+3)$; $x^2+2x+3=0$; Yechimi yo'q.

$x=-1$ va $x=3$ berilgan tenglamani qanoatlantiradi. *Javobi:* {-1; 3} ▲

2. FUNKSIYA TUSHUNCHASI

X va Y haqiqiy sonlar to'plamlari berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar har bir $x\in X$ ga biror qonun yoki qoida bo'yicha aniq bitta $y\in Y$ mos kelsa, *y miqdor x ning* funksiyasi deyiladi. Bu

$y=f(x)$ (yoki $u=\varphi(x)$ va h.k.)

ko'rinishda belgilanadi. *x* - *erkli o'zgaruvchi* yoki argument; *y* - funksiya yoki *bog'liq o'zgaruvchi* deyilib, *y* miqdor funksiyaning *x* nuqtadagi qiymatini ifodalaydi.

X - funksiyaning aniqlanish sohasi deyilib, *D(f)* kabi belgilanadi: $D(f)=X$.

Y- funksiyaning qiymatlar to'plami yoki *o'zgarish sohasi* deyilib, *E(f)* kabi belgilanadi: *E(f)=Y*.

Funksiyaning berilish usullari

Funksiya 3 xil usulda berilishi mumkin:

1. A*nalitik* usulda, ya'ni formula bilan. Masalan: $y = x^2$, $f(x) = 2\sin x$, $g(x) = 3^{2x}$.
2. *Jadval* yordamida. Masalan:

x	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

3. *Grafik* usulda. Masalan: 1-rasmdagi kabi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini topish

Agar funksiya analitik usulda berilgan bo'lib, aniqlanish sohasi ko'rsatilmagan bo'lsa, argumentning shu analitik ifoda ma'noga ega bo'ladigan barcha qiymatlari to'plami funksiyaning aniqlanish sohasi deb tushuniladi. Bu holda funksiyaning aniqlanish sohasi *tabiiy aniqlanish sohasi* yoki *mavjudlik sohasi* ham deyiladi.

Masalan: $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasi: $x-1 \neq 0;\ x \neq 1,\ ya'ni\ x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$;

$y = x\sqrt{x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi: $x \geq 0$, ya'ni $x \in [0;+\infty)$.

Agar funksiya ko'phaddan iborat bo'lsa, uning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

Masalan: $y = 3x^2 + x - 7$; $f(x) = 9x^7 + 2x^3 + 1$; $F(x) = -0{,}3x^6$ funksiyalarning aniqlanish sohasi $x \in R$, ya'ni $x \in (-\infty;\ +\infty)$.

$y = f(x)$ funksiyaning grafigi deb koordinata tekisligining barcha $(x;\ f(x)),\ (x \in X)$ nuqtalari to'plamiga aytiladi. Bu nuqtalar, ko'p hollarda, chiziqni hosil qiladi.

Masalan, 1-rasmda $y = \lg(25 - x^2) + \dfrac{1}{x}$ funksiyaning grafigi tasvirlangan

1-misol

$y = \lg(25 - x^2) + \dfrac{1}{x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Δ Logarifm ostidagi ifoda $25 - x^2 > 0$ da, ikkinchi qo'shiluvchi esa $x \neq 0$ da mavjud. Unda berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi quyidagi sistemaning yechimidan iborat:

$$\begin{cases} 25 - x^2 > 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 < 25, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| < 5, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -5 < x < 5, \\ x \neq 0; \end{cases} \qquad (A)$$

x∈(-5;0)U(0; 5). *Javobi:* (-5; 0)U(0; 5)

(A) tengsizliklar sistemasining **Maple** KMS da yechlilshi quyidagicha:

```
> solve({25-x^2>0, x<>0}, x);
```

ya'ni Maple da sistema tengsizliklar to'plami deb qaraladi va qaysi o'zgruvchiga nisbatan yechilishi albatta ko'rsftiladi. Yechim quyidagi ko'rinishda hosil bo'ladi.

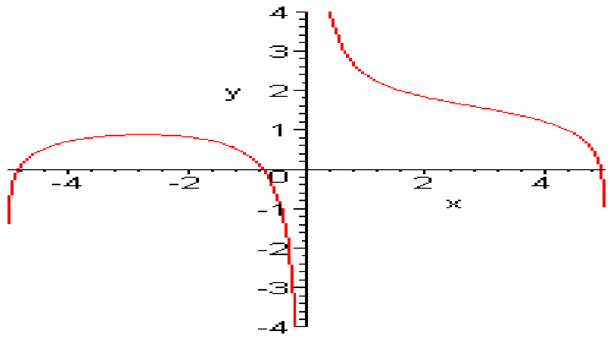
$$\{-5 < x,\ x < 0\},\ \{x < 5,\ 0 < x\}$$

Bu funksiyaning grafigini **Maple** chizish quyidagicha:

```
f:=x->log10(25-x^2)+1/x;  plot(f(x), x=-5..5, y=-4..4);
```

Natijada quyidagi hosil bo'ladi: $f := x \to \log10(25 - x^2) + \dfrac{1}{x}$

Grafigi 1-rasmla keltirilgan. ▲



1-rasm.

Eslatma. plot(f(x), x=-5..5, y=-4..4)

f(x) funksiyning berilgan $x\in(-5, 5)$, $y\in(-4, 4)$ oraliqda grafigini chizish funksiyasidir.

Murakkab funksiya

Ta'rif. $y=f(u)$ funksiya E to'plamda, $u=\varphi(x)$ funksiya X to'plamda berilgan va $u=\varphi(x)$ ning qiymatlar to'plami E ning qism-to'plami bo'lsin. Unda

$$y=f\,[\varphi(x)]$$

- murakkab funksiya, yoki $y=f(u)$ va $u=\varphi(x)$ funksiyalarning kompozitsiyasi deyiladi.

Masalan: 1. $y=sinu$ va $u=5x-3$ lardan tuzilgan murakkab funksiya, ya'ni bu funksiyalarning kompozisiyasi $y=sin(5x-3)$ dir.

2. $y=tg^2x$ funksiya $y=u^2$ va $u=tgx$ funksiyalardan tuzilgan murakkab funksiyadir.

2-misol

$f(x)=x^2$, $g(x)=lgx$ funksiyalar berilgan.

f[g (x)], f(g(10), g[f(x)], g[f(10)], g[f(-2)] funksiyalarni toping.

Δ $y=f(x)=x^2$, $u=g(x)=lgx$; $f[g(x)]=f(u)=u^2=lg^2x$; $f[g(10)]=lg^2 10=1^2=1$;

$g[f(x)]= g(y)=lgy=lg(x^2)$; $g[f(10)]=lg10^2 = 2$; $g[f(-2)]=lg(-2)^2 = lg4=0,60206$.

3. JUFT, TOQ, CHEGARALANGAN, DAVRIY VA MONOTON FUNKSIYALAR

Juft va toq funksiyalarning ta'rifi

X to'plamga x son bilan birga $-x$ ham tegishli bo'lsa, bunday to'plam *koordinata boshiga nisbatan simmetrik to'plam* deyiladi.

Ta'rif. Agar koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan X to'plamda aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun istalgan $x\in X$ da:

$f(-x) = f(x)$ bo'lsa - *juft funksiya;*

$f(-x) = -f(x)$ bo'lsa - *toq funksiya* deyiladi.

$f(-x) \neq \pm f(x)$ bo'lsa, bu funksiya *juft ham, toq ham emas* deyiladi.

Masalan: $y=5x^2$ juft funksiya, chunki $y(-x)=5(-x)^2=5x^2=y(x)$;

$y=4x^5\cos 2x$ toq funksiya, chunki

$$y(-x)=4(-x)^5\cos 2(-x)=-4x^5\cos(-2x)=-4x^5\cos 2x=-y(x);$$

$f(x)=x+7x^2$ juft funksiya ham, toq funksiya ham emas, chunki

$$f(-x)=-x+7(-x)^2=-x+7x^2\neq\pm f(x).$$

Juft va toq funksiyalarning xossalari

1. Juft funksiyalarning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi.
2. Toq funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.
3. O'zgarmas funksiya: $f(x)=c$, (c – o'zgarmas son) - juftdir. Isboti: $f(-x)=c=f(x)$.
4. Juft funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, nisbati va kompozitsiyasi ham yana juft funksiya bo'ladi. Masalan: 3, x^4, $\cos x$ juft funksiyalar bo'lgani uchun:

$3+x^4+\cos x,\ 3x^4-\cos 2x,\ 3+x^4\cos 6x,\ \dfrac{3+x^4}{x^4+\cos x}$ funksiyalar ham juft bo'ladi.

5. Ikkita toq funksiyaning yig'indisi va ayirmasi toq, ko'paytmasi va nisbati juft funksiya bo'ladi. Masalan: $x^3,\ \sin x$ juft funksiyalar bolgani uchun:

$x^3+\sin x,\ x^3-\sin x$ - toq, $x^3\sin x,\ \dfrac{x^3}{\sin x},\ \dfrac{\sin x}{x^3}$ - juft funksiyalar bo'ladi.

6. Juft funksiya bilan toq funksiyaning ko'paytmasi va nisbati toq funksiya, yig'indisi va ayirmasi esa juft funksiya ham, toq funksiya ham bo'lmaydi.

Masalan: x^2 - juft, $\sin x$ - toq funksiyalar bolgani uchun:

$x^2\sin x,\ \dfrac{x^2}{\sin x}$ - toq funksiyalar bo'ladi,

$x^2+\sin x,\ x^2-\sin x$ - juft funksiya ham, toq funksiya ham bo'lmaydi.

Ko'rinadiki, juft va toq funksiyalar ustidagi amallar musbat va manfiy sonlar ustidagi amallarga o'xshash.

Chegaralangan funksiyalar

Ta'rif. Agar *f(x)* funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha *x* lar uchun biror *M>0* son topilib, |*f(x)*|<*M* o'rinli bo'lsa, *f(x)* funksiya chegaralangan deyiladi.

Masalan: $x\in(-\infty,+\infty)$ oraliqda: $y=x^2$ funksiya chegaralanmagan, $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ funksiya esa chegaralangandir.

3-misol.

$f(x)=2^{-x}$ va $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ funksiyalardan qaysi biri $x\in(0;+\infty)$ oraliqda chegaralangan.

Δ Qaralayotgan oraliqda

$$|f(x)| = |2^{-x}| = 1/2^x \le 1,$$

bo'lgani uchun *f(x)* $x\in(0;+\infty)$ oraliqda chegaralangan funksiyadir.

$$|g(x)| = \left|\frac{1}{x^2}\right| < M; \qquad |x| > \frac{1}{\sqrt{M}}$$

tengsizlik *x* ning 0 ga yetarlicha yaqin qiymatlarida bajarilmaydi, yani g*(x)* - chegaralanmagan funksiya. ▲

Davriy funksiyalar

Ta'rif. Funksiya aniqlanish sohasining istalgan *x* nuqtasi va *T* haqiqiy son uchun $f(x\pm T)=f(x)$ tenglik bajarilsa, *f(x)* - davriy funksiya; T – uning davri, *T* ning eng kichik musbat qiymati T_0 esa bu funksiyaning asosiy davri yoki eng kichik musbat davri deyiladi.

Masalan: 1. $\sin x$ va $\cos x$ davrli $2\pi n,\ (n\in Z)$ ga, eng kichik musbat davri esa 2π ga teng davriy funksiyalardir: $\sin x=\sin(x+2\pi n),\ \cos x=\cos(x+2\pi n)$.

2. tgx va $ctgx$ davrli $\pi n,\ (n\in Z)$ ga, eng kichik musbat davri π ga teng davriy funksiyalardir: $tgx=tg(x+2\pi n),\ ctgx=ctg(x+2\pi n)$.

Agar *f(x)* funksiyaning eng kichik musbat (asosiy) davri T_0 bo'lsa, *Af(kx+b)* funksiyaning asosiy davri $\dfrac{\grave{O}_0}{k}$ bo'ladi.

Masalan: *y=sinx* ning asosiy davri $T_0=2\pi$ bo'lgani uchun *y=-3sin(4x-1)* funksiyaning asosiy davri $\dfrac{\grave{O}_0}{4}=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ bo'ladi.

Monoton funksiyalar

Ta'rif. Agar x_1 va x_2 $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli nuqtalar bo'lsin. Agar

- $x_2>x_1$ bo`lsa $f(x_2)>f(x_1)$ bo'lsa, funksiya - *o'suvchi;*
- $x_2>x_1$ bo`lsa $f(x_2)\geq f(x_1)$ bo'lsa - *kamaymaydigan;*
- $x_2>x_1$ bo`lsa $f(x_2)<f(x_1)$ bo'lsa - *kamayuvchi*;
- $x_2>x_1$ bo`lsa $f(x_2)\leq f(x_1)$ bo'lsa - *o'smaydigan*

funksiya deyiladi. Bu xil funksiyalar *monoton (bir yo'nalishda o'zgaradigan) funksiyalar,* ulardan o'suvchi va kamayuvchi funksiyalar esa *qat'iy monoton funksiyalar* deyiladi.

Masalan: $y=x^2$ funksiya (parabola) o'zining mavjudlik sohasi $(-\infty;\infty)$ da monoton emas. Lekin bu funksiya $[0;+\infty)$ oraliqda o'suvchi, $(-\infty;0)$ da kamayuvchi bo'lib, ushbu oraliqlarda nonotondir.

4. ELEMENTAR VA ASOSIY ELEMENTAR FUNKSIYALAR

Asosiy elementar funksiyalar

Ta'rif. Asosiy elementar funksiyalar deb quyidagi funksiyalarga aytiladi:

1. O'zgarmas funksiya: *y=c (c-o'zgarmas son)*. Uning aniqlanish sohasi $x\in R$.
2. Darajali funksiya: $y=x^{\alpha}$ (α *- noldan farqli haqiqiy son).* Aniqlanish sohasi α ga bog'liq.
3. Ko'rsatkichli funksiya: $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Aniqlanish sohasi: $x\in R$.
4. Logarifmik funksiya: $u=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Aniqlanish sohasi: $x\in R_+$.
5. Trigonometrik funksiyalar:
   $y=\sin x$ va $y=\cos x$. Aniqlanish sohasi: $x\in R$..
   $y=tgx$. Aniqlanish sohasi: $x\neq \pi/2+\pi n,\ n\in Z$.
   $y=ctgx$. Aniqlanish sohasi: $x\neq \pi n,\ n\in Z$.
6. Teskari trigonometrik funksiyalar:
   $y=\arcsin x$ va $y=\arccos x$. Aniqlanish sohasi: $x\in[-1;1]$;
   $y=arctgx$ va $y=arcctgx$. Aniqlanish sohasi: $x\in R$.

Elementar funksiyalar

Ta'rif. Elementar funksiyalar deb asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar hamda ularning kompozitsiyalari (murakkab funksiyalar tuzish) yordamida hosil bo'lgan funksiyalarga aytiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, asosiy elementar funksiyalarning o'zi ham elementar funksiyalar sinfiga tegishli. Masalan: quyidagilar elementar funksiyalardir:

$y=\sin(4x-3)$, $y=2^{tgx}$, $y=\ln\cos x$, $y=\sqrt{x^2+\cos 2x}$.

5. SONLI KETMA-KETLIK VA UNING LIMITI

Sonli ketma-ketlikning ta'rifi

Ta'rif. Aniqlanish sohasi natural sonlar to`plami $N$ dan iborat bo`lgan $x=f(n),\ (n\in N)$ funksiya natural argumentli funksiya yoki sonli ketma-ketlik deyiladi. Uning qiymatlari argumentning o`sish tartibida

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \qquad (1)$$

ko`rinishda yoziladi. Bu yerda $x_1=f(1)$, $x_2=f(2)$, ... , $x_n=f(n)$, ... ketma-ketlikning hadlari; $x_n=f(n)$ - n - hadi yoki umumiy hadi deyiladi. Ketma-ketlik $\{f(n)\}$ yoki $\{x_n\}$ kabi belgilanadi.

Ketma-ketliklarni qo`shish, ayirish, ko`paytirish va barcha hadlari noldan farqli ketma-ketlikka bo`lish mumkin. Buning uchun ularning mos, ya'ni bir xil o`rindagi hadlarini qo`shish, ayirish, ko`paytirish va bo`lish kerak.

Ketma-ketlikning berilish usullari

Ketma-ketlik quyidagi usullarda berilishi mumkin:

1. Umumiy hadi orqali. Masalan:

1) $x=2n-1$ funksiya umumiy hadi $x_n=2n-1$ bo`lgan $\{2n-1\}$ ketma-ketlikni, ya'ni

$1, 3, 5, ..., 2n-1, ...$ toq sonlar ketma-ketligini beradi.

2) umumiy hadi $x_n = 2/n$ bo'lgan ketma-ketlik: $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, ..., \frac{2}{n}, ...$

3) umumiy hadi $c_n = \frac{n}{n+1}$ bo'lgan ketma-ketlikning dastlabki to'rtta hadini yozing.

$$c_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}, \quad c_3 = \frac{3}{4}, \quad c_4 = \frac{4}{5}, ...$$

bo`lganidan uni $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n}{n+1}, ...$ deb yozish mumkin.

2. Rekurrent formula bilan(latincha «recurro» - qaytuvchi degani). Bunda uning hadlari o`zidan oldingi hadlar yordamida yoziladi. Masalan: $a_{n+1} = 3a_n+2,\ a_1 = 1$ rekurrent formula bilan berilgan ketma-ketlikning hadlari:

$a_1=1,\quad a_2=3a_1+2=3\cdot1+2=5,\quad a_3=3a_2+2=17,\ a_4=3a_3+2=53,\quad a_5=3a_4+2=161,$

ya'ni: $1, 5, 17, 53, 161, ...$

Maktab kursidan ma'lumki, umumiy hadi

$$a_n = nd+k \quad \text{va} \quad b_n = cq^n$$

ko`rinishda bo`lgan ketma-ketliklar arifmetik va geometrik progressiyalardir. Bu yerda d arifmetik progressiyaning ayirmasi, q - geometrik progressiyaning maxraji deyiladi.

Chegaralangan va monoton ketma-ketliklar

Agar ketma-ketlikning barcha hadlari biror sondan kichik(katta) bo`lsa, bunday ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan(quyidan chegaralangan) deyiladi. Ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan ketma-ketlik chegaralangan deyiladi. Har qanday chegaralangan $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun shunday $M>0$ son topiladiki, uning barcha hadlari uchun $|x_n|<M$ bo`ladi. $\{x_n\}$ ketma-ketlik: $x_1 < x_2 < x_3 < ...$ bo`lsa - monoton o`suvchi;

$x_1 > x_2 > x_3 > ...$ bo`lsa - monoton kamayuvchi;

$x_1 \le x_2 \le x_3 \le ...$ bo`lsa - kamaymaydigan;

$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge ...$ bo`lsa – o'smaydigan

ketma-ketlik deyiladi. Masalan,

$2, 3, 4, ..., n+1, ...$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan va monoton o`suvchi;

$0, -1, -2, ..., 1-n, ...$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan va monoton kamayuvchi;

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ – chegaralangan va monoton kamayuvchi ketma-ketlikdir.

1-misol

Umumiy hadi bilan berilgan quyidagi ketma-ketliklarning to`rttadan hadlarini yozing. Uning o`suvchi yoki kamayuvchi, chegaralangan yoki chegaralanmagan ekanini aniqlang.

1) $x_n = \frac{n+1}{n}$, 2) $x_n = 3 + \frac{1}{n}$, 3) $x_n = 16\cdot2^{-n}$,

4) $y_n = 5-3n$, 5) $x_n = n\,[\,(-1)^n+1]$, 6) $x_n = \frac{(-1)^n+1}{n}$.

Δ 1) $x_1 = \frac{2}{1} = 2,\ x_2 = \frac{3}{2},\ x_3 = \frac{4}{3},\ x_4 = \frac{5}{4}$, ya'ni $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, ...$

Ko`rinadiki, berilgan ketma-ketlik kamayuvchi va chegaralangan, uning barcha hadlari uchun $x_n \le$

2 tengsizlik o`rinli.

5) $x_1=1\cdot[-1+1]=0$, $x_2=-2$, $x_3=0$, $x_4=-4$, ... ya'ni, *0, 4, 0, 8, ...* .

Bu ketma-ketlik quyian chegaralangan (barcha hadlari 0 dan kichik emas), lekin o`suvchi ham, kamayuvchi ham emas.

2), 3), 4) va 6) qismlarni mustaqil bajaring.

FUNKSIYANING MONOTONLIGI VA UNING EKSTRIMUMLARI

Mavzuning rejasi

1. Funksiyaning monotonligi.
2. Funksiyaning ekstremumi.

Tayanch so'z va iboralar: monoton funksiya, munoton o'suvchi, monoton kamayuvchi, doimiy funksiya, maksimum, minimum, ekstremum, local ekstremum, local minimum, eng katta, eng kichik.

1. Funksiyaning monotonligi

1.1. Umumiy tushunchalar

$y = f(x)$, $x\in D$ funksiya berilgan bo'lsin.

Ta'rif: *$y = f(x)$ funksiya $H\subset D$ sohada monoton o'suvchi deyiladi, agar $\forall\ x_1, x_2 \in H$, $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ va monoton kamayuvchi deyiladi, agar $\forall x_1, x_2\in H$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.*

Bunday funksiyalar ba'zan, jiddiy o'suvchi va jiddiy kamayuvchi deyiladi. Agar $x_1<x_2 \in H$ shartdan faqat $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1)\ge f(x_2)$) kelib chiqsa, u holda funksiya H to'plamda kamaymovchi (o'smovchi) yoki soddagina o'suvchi (kamayuvchi) deyiladi. Doimiy funksiya bir vaqtning o'zida kamaymovchi, ham o'smovchi bo'ladi.

1.2. FUNKSIYANING DOIMIYLIK (KRITERIYASI) ALOMATI

Differensiallanuvchi funksiya $]a,b[$ oraliqda doimiy bo'lishi uchun $f'(x) \equiv 0$ bo'lishi zarur va kifoyadir.

Zaruriyligi: $f(x) = const$ deb faraz qilaylik $\Rightarrow f'(x)= 0$

Kifoyaligi: $\forall\ x \in]a, b[$ uchun $f'(x)= 0$ bo'lsin. x_0 nuqtani belgilab olamiz, bu holda $\forall x$, $x_0 \in]a, b[$ uchun Lagranj teoremasi shartlari bajariladi. Demak, $\exists\ c \in[x_0, x]$: $f(x)- f(x_0)= f'(c)(x - x_0)$ bo'ladi. Biroq, farazimizga binoan $f'(c) = 0$, ya'ni $f(x)- f(x_0)=0 \Rightarrow f(x) = f(x_0)=const$.

Teorema to'liq isbot bo'ldi.

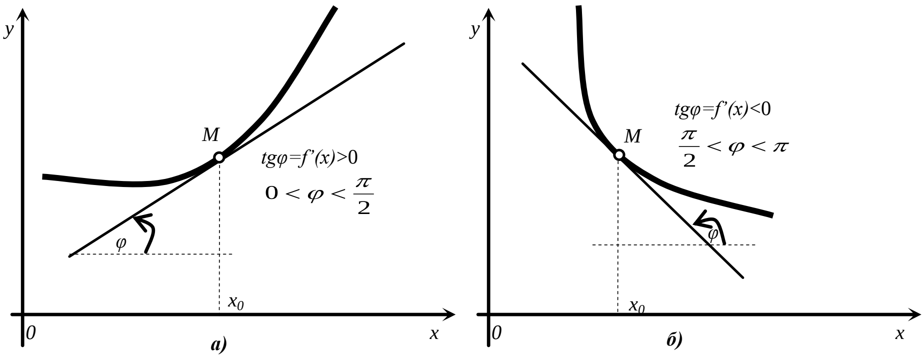
1.3. FUNKSIYANING MONOTONLIK ALOMATI

$f(x)$ funksiya biror $]a,b[$ oraliqda differensiallanuvchi va uning chegara nuqtalarida uzluksiz bo'lsin. $f(x)$ funksiya $]a, b[$ oraliqda monoton o'suvchi (kamayuvchi) bo'lishi uchun $\forall x\in]a, b[$ da $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) bo'lishi shart.

Isboti: Funksiya o'suvchi bo'lgan holni qaraymiz. $f'(x)>0$ shart berilgan. Lagranj teoremasini $\forall[x_1, x_2]\subset]a, b[$ ga qo'llaymiz: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, $c \in]x_1, x_2[$. $f'(c) > 0$ shartga binoan, $x_2 - x_1 > 0$. Demak, $f(x_2) - f(x_1)> 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Bu esa $x_2 >x_1$ da $f(x_2)> f(x_1)$, ya'ni $f(x)$ o'suvchi demakdir.

Teoremaning ikkinchi qismini isbotlash o'quvchiga havola qilinadi. Alomatning geometrik tasviri ***8-shakl***da.

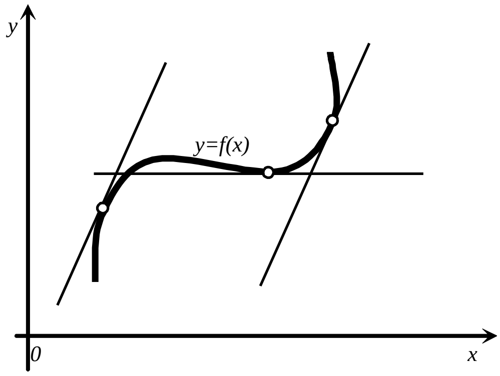


8-SHAKL

Biror oraliqda kamaymovchi (o'smovchi) funksiya uchun shu oraliqda $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) *bo'lishi zarur va yetarli shart* (***9-shakl***).

Bu holda, funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma ba'zi nuqtalarda *Ox* o'qiga parallel bo'ladi.

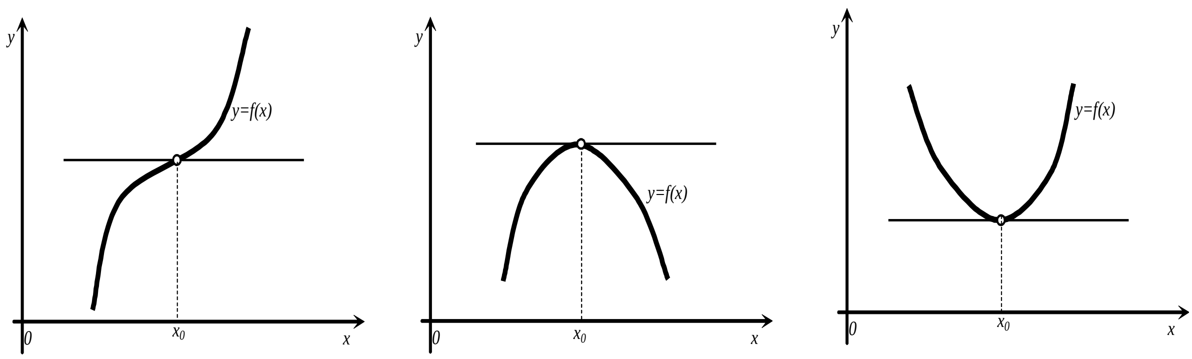
Agar $f'(x_0)=0$ *bo'lsa, u holda* x_0 *nuqta* $f(x)$ *funksiyaning stasionar nuqtasi deyiladi.*



9-shakl

Stasionar nuqtalarga funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma *Ox* o'qga parallel bo'lgan nuqtalar tug'ri keladi. Yuqorida o'rnatilgan alomat har bir nostasionar nuqtada funksiya o'zgarishini aniqlashga imkon beradi.

Funksiyaning stasionar nuqtadagi, hamda uning hosilaga ega bo'lmagan nuqtadagi xarakteri alohida o'rganiladi. Funksiya grafigining stasionar nuqta atrofidagi mumkin bo'lgan ko'rinishi ***10-shakl***da keltirilgan.



10-SHAKL

2. FUNKSIYANING EKSTREMUMI

2.1. ASOSIY TUSHUNCHALAR

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f(x_0)$ maksimumga ega deyiladi, agar bu nuqtaning biror atrofida ($x \neq x_0$ *da*)

$f(x) < f(x_0)$ (1) *tengsizlik bajarilsa;*

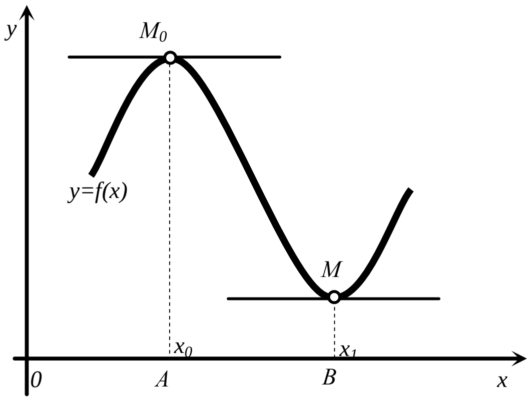
$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f(x_0)$ minimumga ega deyiladi, agar bu nuqtaning biror atrofida ($x \neq x_0$ *da*)

$f(x) > f(x_0)$ (2) *tengsizlik bajarilsa.*

Shunday qilib, funksiyaning o'zgarishi x_0 nuqta atrofida qaraladi va (1) shart bajarilganda funksiya x_0 nuqtada ***lokal (maxalliy) maksimum***ga, va (2) shart bajarilganda ***lokal minimum***ga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum va minimumlari funksiyaning ekstremumlari deyiladi. Funksiya maksimum yoki minimumga erishgan nuqta, funksiyaning ekstremum nuqtasi deyiladi.

Masalan, grafigi 11- shaklda berilgan $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f(x_0)=AM_0$ maksimumga, x_1 nuqtada $f(x_1)=BM$ minimumga ega.



11-SHAKL

2.2. Ekstremumning zaruriy sharti

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremum (maksimum yoki minimum)ga ega bo'lsin. Agar funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, bu holda $f'(x_0)=0$ bo'lishi zarurdir.

Haqiqatan ham, agar $f'(x_0)\neq 0$ deb faraz qilinsa, u holda x_0 nuqtada: $f'(x)>0$ bo'lsa funksiya o'suvchi, $f'(x_0)<0$ bo'lsa funksiya kamayuvchi bo'lar edi.

1-misol

$f(x) = x^2$, $x\in]-\infty; +\infty[$.

$f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$. $x= 0$ nuqtaning atrofida ($x\neq 0$ bo'lganda) $f(x) > f(0)$, tengsizlik bajariladi, demak, $f(0)= 0$ berilgan funksiyaning minimumi. (***12-shakl***).

2-misol

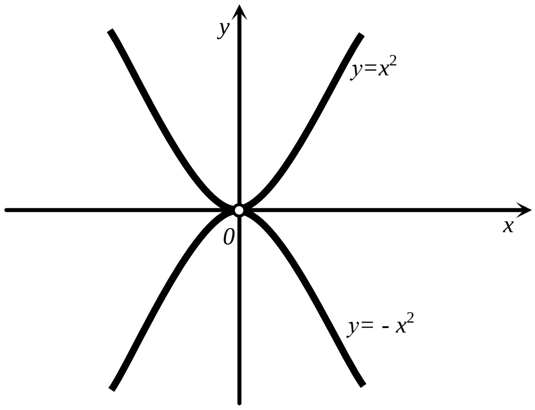
$f(x) = -x^2$, $x\in]-\infty; +\infty[$

$f'(x) = -2x$, $f'(0) = 0$. $x = 0$ nuqta ($x \neq 0$ bo'lganda) atrofida $f(x)< f(0)$, demak, $f(0) = 0$ berilgan funksiyaning maksimumi. (***12-shakl***).

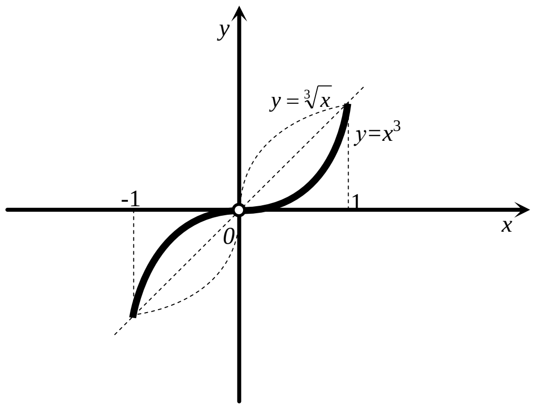
3-misol

$f(x)= -x^3$, $x\in]-\infty; +\infty[$ funksiya uchun $f'(0) = 3x^2\big|_{x=0}$ biroq $x= 0$ nuqta atrofida (1) yoki (2) tengsizliklar bajarilmaydi. Demak $x = 0$ nuqtada ekstremum yo'q (***13-shakl***).

Izoh: Qaralgan nuqtalardan $x = 0$ stasionar nuqta, hamda bu nuqtada funksiya uzluksiz.
Endi quyidagi misollarni qaraymiz.



12-shakl



13-shakl

4-misol

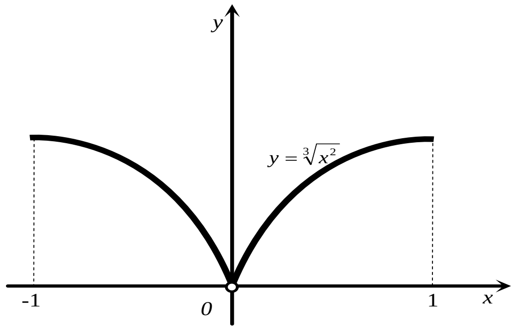
$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \in \left]-\infty;+\infty\right[= D(f)$

$f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow \quad f'(0) = +\infty$, $x = 0$ nuqta atrofida (1) va (2) tengsizlik bajaril-maydi. Demak $x = 0$ nuqtada ekstremum yuk (***13-shakl***).

5-misol

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad D(f) = \left]-\infty;+\infty\right[$

$f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f'(0) = \infty$, $x = 0$ nuqtaning atrofida ($x \neq 0$ da) $f(x) > f(0)$ demak, $x = 0$ nuqtada funksiya $f(0) = 0$ ga teng bo'lgan minimumga ega (***14-shakl***).



14-shakl

6-misol

$f(x) = |x|, \quad D(f) = \left]-\infty;+\infty\right[$

$f'(0)$ hosila mavjud emas. Biroq $x = 0$ nuqta atrofida ($x \neq 0$) $f(x) > f(0)$, ya'ni $x = 0$ da funksiya $f(0) = 0$ ga teng minimumga ega.

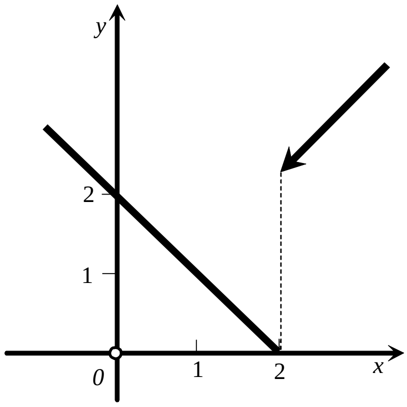
4-6 misollarda qaralgan funksiyalar uzluksiz, biroq 4,5 misollarda funksiya hosilasi cheksizga teng. Ammo 1-misolda ekstremum yo'q, 5-da funksiya ekstremumga ega, 6-misolda esa funksiya hosila mavjud bulmagan nuqtada ekstremumga ega.

Demak, funksiya na faqat stasionar nuqtada, balki hosila cheksiz bo'lgan va mavjud bo'lmagan nuqtada ham ekstremumga ega bo'lishi mumkin ekan.

7-misol

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leq 2 \quad \partial a \\ 2x - 1, & x > 2 \quad \partial a \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-1, & x\le 2 \quad \partial a\\ 2, & x>2 \quad \partial a\end{cases}, \quad x=2$$ nuqtada funksiya uzilishga ega (chekli uzilish) (***15-shakl***). $f(2)=(2-x)\big|_{x=2}=0$, $x = 2$ nuqta atrofida ($x \neq 2$ da) $f(x) > f(2)$, demak $x = 2$ nuqtada funksiya $f(2) = 0$ ga teng minimumga ega.



15-shakl

Shunday qilib, 7- misol ko'rsatadiki, funksiya uzilishga ega bo'lgan nuqtalarda ham ekstremumga ega bo'lishi mumkin ekan. Bundan keyin ekstremumni funksiyaning uzluksizlik nuqtalarida izlaymiz. Uzilish nuqtalarida ekstremumga tekshirish alohida izlanishlar o'tkazishni talab qiladi.

Demak, funksiyaning ekstremumini funksiya hosilasi yoki nolga teng, yoki cheksiz, yoki umuman mavjud bo'lmagan nuqtalarda izlash kerak. Bu nuqtalar *kritik nuqtalar* deyiladi.

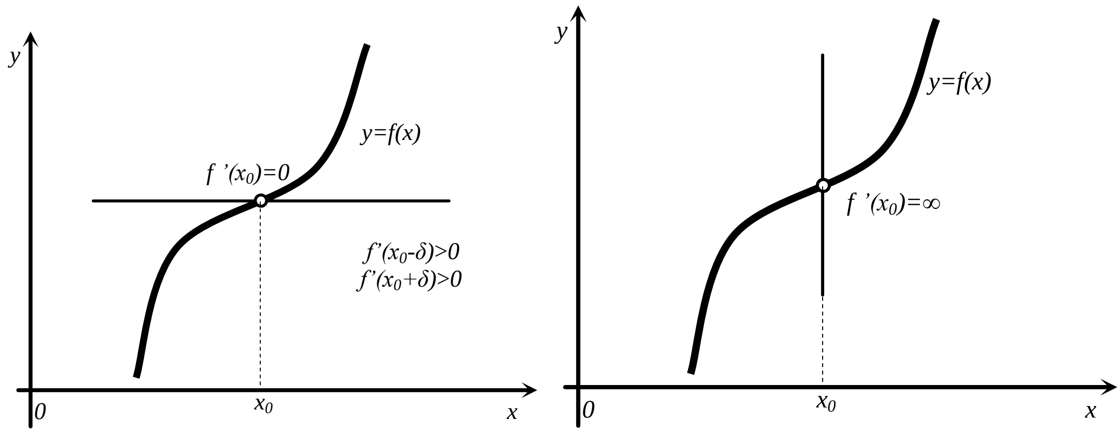
Shuni ta'kidlash kerakki, agar x_0 nuqta kritik nuqta bo'lsa, bu holda funksiya grafigiga $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada o'tkazilgan urinma Ox o'qiga ($f'(x) = 0$) yoki Oy o'qiga ($f'(x_0)=\infty$) parallel bo'ladi, yoki mavjud emas.

2.3. Funksiyani birinchi hosila bo'yicha tekshirish (ekstremumning birinchi yetarli sharti)

$f(x)$ funksiyani qaraymiz: x_0 - funksiyaning kritik nuqtasi; $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va x_0 nuqtaning atrofida differensiallanuvchi (x_0 bundan xoli bo'lishi mumkin), undan tashqari, $f'(x)$ x_0 ning chap tomonida ham o'ng tomonida ham aniq ishoraga ega bo'lsin.

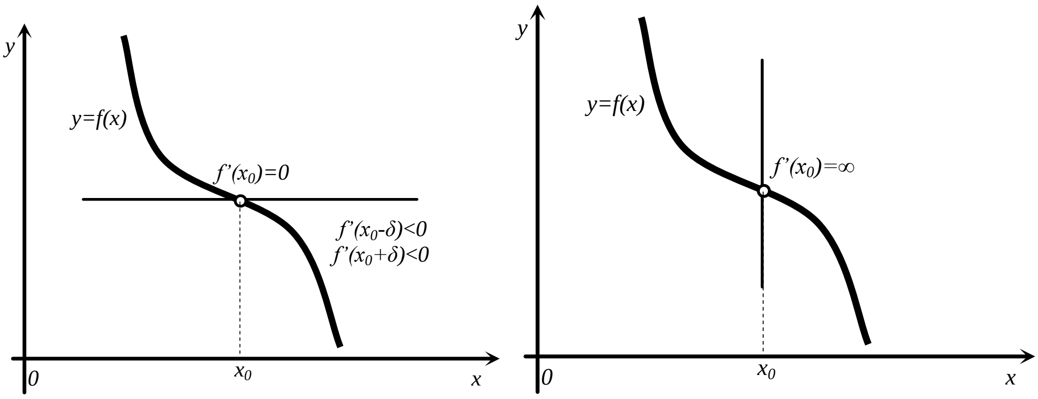
16-19 shakllarda $f'(x) = 0$ yoki $f'(x_0)=\infty$ bo'lgan hollar tasvirlangan.

a) **b)**



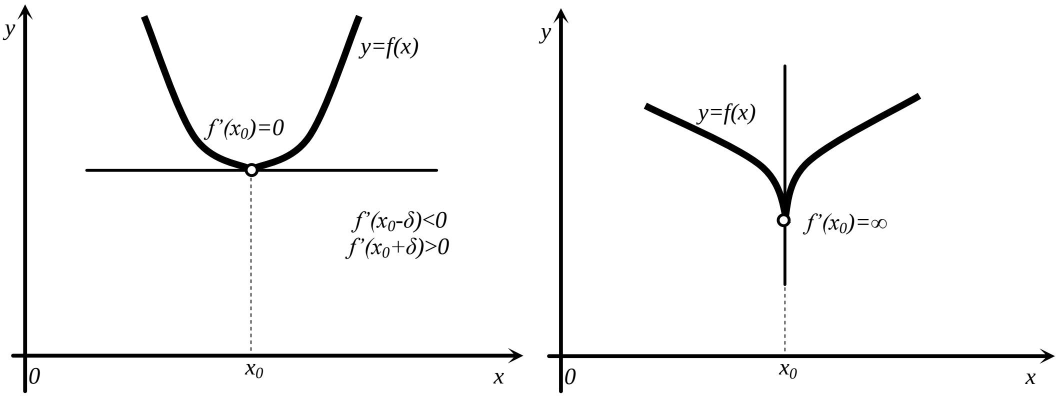
$f(X)$ FUNKSIYA X_0 NUQTADA O'SADI. ***16-SHAKL***

A) B)



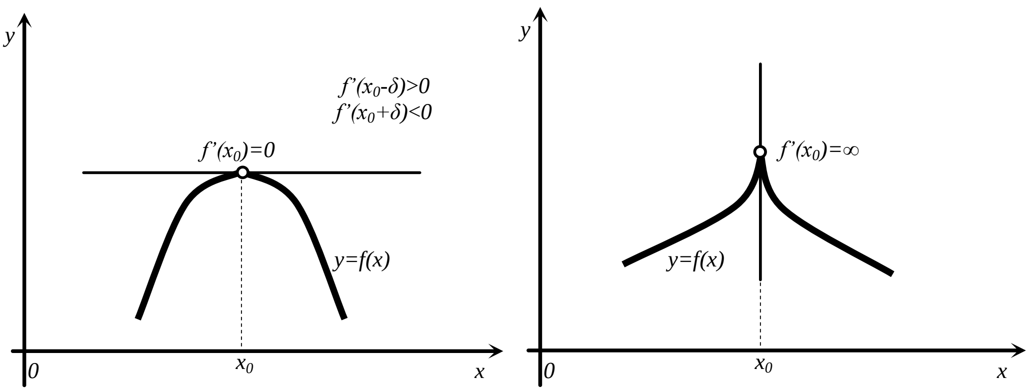
F(*X*) FUNKSIYA X_0 NUQTADA KAMAYADI. ***17-SHAKL***

a) **b)**



f (*x*) funksiya x_0 nuqtada *min* ga ega. ***18-shakl***

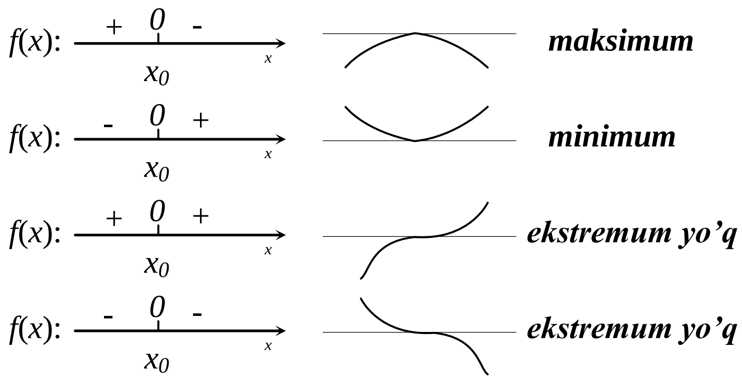
a) **b)**



f (*x*) funksiya x_0 nuqtada *max* ga ega ***19-shakl***

f ′(x) hosilaning x_0 nuqtaning chap va ung tomonidagi ishorasini aniqlab 2-jadvalda ko’rsatilgan hollardan qaysisi o’rinli bo’lishini aniqlash qiyin emas. Jadvaldan ekstremumning birinchi yetarli belgisini olamiz:

Agar f(x) funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo’lib, f′(x) hosila x_0 nuqtadan o’tganda ishorasini almashtirsa, («-» dan «+» ga yoki «+» dan «-» ga o’tsa), bu holda f(x) funksiya x_0 nuqtada ekstrimumga (mos ravishda minimumga 18-shakl yoki maksimumga 19-shakl) ega bo’ladi.



2-jadval

x ning qiymati	**16 - shakl**		**17 - shakl**		**18 - shakl**		**19 - shakl**	
	f'(x)	**f (x)**	**f'(x)**	**f (x)**	**f'(x)**	**f (x)**	**f'(x)**	**f (x)**
$(x_0-\delta, x_0)$	+	o'suvchi	–	kamayuvchi	–	kamayuvchi	+	o'suvchi
$(x_0+\delta, x)$	+	o'suvchi	–	kamayuvchi	+	o'suvchi	–	kamayuvchi
x_0 nuqtada	0 yoki cheksiz	o'sadi	0 yoki cheksiz	kamayadi	0 yoki cheksiz	*min* ga ega	0 yoki cheksiz	*max* ga ega

misol

$f(x) = 100(x-1)^4(x-2)^3$ funksiya ekstremumga tekshirilsin.

Yechilishi: 1. Hosilani topamiz: $f'(x) = 700(x-1)^3(x-2)^2(x-\frac{11}{7})$

2. $f'(x) = 0$ tenglama ildizlarini topamiz:

$$700(x-1)^3(x-2)^2(x-\frac{11}{7}) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{11}{7}$$

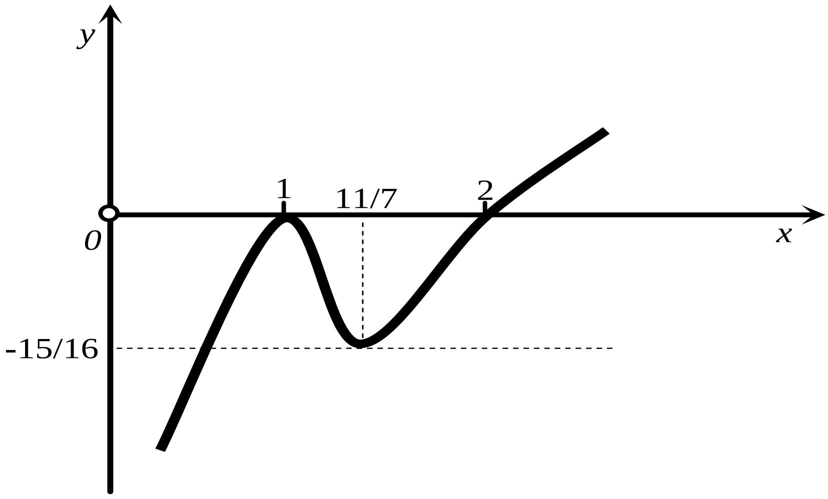
3. Kuyidagi 3- jadvalni tuzamiz:

3-jadval

x ning qiymati	**]-∞,1[**	**1**	**]1,11/7[**	**11/7**	**]11/7,2[**	**2**	**]2,+∞[**
y' ishorasi	+	0	–	0	+	0	+
y qiymati		0		– 15/16		0	
y xarakteri	o'sadi	*Max*	kamayadi	*Min*	o'sadi	ekstrimum. yo'q	o'sadi

Funksiya grafigi ***20-shakl***da tasvirlangan.

Yuqorida bayon qilingan usul (metod)ni, na faqat x_0 nuqta $f(x)$ uchun, balki $f'(x)$ uchun ham kritik nuqta bo'lgan holda qo'llashga to'g'ri keladi. x_0 nuqta $f'(x)$ uchun kritik nuqta bo'lmagan holda, funksiyani ikkinchi hosila ishorasi yordamida ham tekshirish mumkin.



20-shakl

2.4. Funksiyani ikkinchi hosila ishorasi yordamida tekshirish (Ekstremumning ikkinchi yetarli sharti)

Agar $f'(x_0)=0$ va $f''(x_0)\neq 0$ bo'lsa $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada:

a) $f''(x_0) > 0$ da minimumga ega bo'ladi;

b) $f''(x_0) < 0$ da maksimumga ega bo'ladi.

Isboti: a) $f''(x_0) > 0$ bo'lsin. Bu holda $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'sadi, $x_0-\delta < x_0 < x_0+\delta$ tengsizlikdan $f'(x_0-\delta) < f'(x_0) < f'(x_0+\delta)$ $(\delta > 0)$ kelib chiqadi. Biroq $f'(x_0) = 0$, demak, $f'(x_0-\delta)<0<f'(x_0+\delta)$.

Bundan, $f'(x)$ hosila x_0 nuqtada ishorasini «–» dan «+» ga almashtirishini ko'rish mumkin. Demak, estremum mavjudligining birinchi yetarli shartiga asosan, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

b) $f''(x_0) < 0$ bo'lsin. Bu holda $f'(x)$ funksiya x_0 nuqtada kamayadi va $x_0-\delta < x_0 < x_0+\delta \Rightarrow f'(x_0-\delta) < f'(x_0) < f'(x_0+\delta) \Rightarrow f'(x_0-\delta) > 0 > f'(x_0+\delta)$, ya'ni $f'(x)$ hosila x_0 nuqtada ishorasini «+» dan «–» ga almashtirada. 1-yetarli shartga asosan $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga ega.

1-misol

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ funksiya ekstremumga tekshirilsin.

Yechilishi: $D(f) =]-\infty;+\infty[$ funksiya $D(f)$ da uzluksiz. Stasionar nuqtalarni topamiz:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$; $3x^2 - 6x - 9 = 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $(x - 3)(x + 1) = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Ikkinchi hosilani hisoblaymiz: $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.

Ikkinchi hosilaning stasionar nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f''(x_1) = f''(-1) = -12 < 0; \qquad f''(3) = 12 > 0.$$

Demak, funksiya $x_1 = -1$ nuqtada maksimumga ega va bu qiymat $f(-1) = 7$ ga teng, $x_2 = 3$ nuqtada minimumga ega va $f(3) = -25$.

2.5. Kesmadagi uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish

$[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz $y= f(x)$ funksiyani qaraylik. Hozircha biz bu funksiyaning faqat lokal maksimum va minimumlarinigina izlash bilan shug'illangan edik, endi esa $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada maksimum va minimum qiymatlarini izlash masalasini qo’yamiz. Ma’lumki funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi maksimumi (minimumi) uning shu kesmadagi eng katta (kichik) qiymati deyiladi va $\sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$ $\left(\inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}\right)$, deb belgilanadi.

Ta’kidlaymizki, $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo’lgan fuknksiya shu kesmada o’zining eng katta (kichik) qiymatini qabul qiladi. Funksiya o’zining bu qiymatlariga kesmaning chetki nuqtalarida ham erishishi mumkin. $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun uning barcha maksimum va minimum qiymatlari, hamda funksiyaning kesmaning chetki nuqtalaridagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari topiladi. Topilgan qiymatlardan eng kattasi (eng kichigi) funksiyaning kesmadagi eng katta (eng kichik) qiymati bo’ladi.

Eng katta (eng kichik) qiymatlarni topish amalda parametrning optimal qiymatini topishda qo’llaniladi.

1-misol

$y = x^4 – 2x^2 + 3$ funksiyaning $[–2; 2]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymati topilsin.

<u>Yechilishi:</u> Kritik nuqtalarni topamiz ularni ekstremumga tekshiramiz:

$y' = 4x^3 – 4x$; $4x(x^2 – 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = – 1$; $x_3 = 1$;

$y'' = 12x^2 – 4 = 4(3x^2 – 1)$; $y'(0) = – 4 < 0$; $y''(– 1) = 8 > 0$; $y''(1) = 8 > 0$.

Funksiya $x = 0$ nuqtada maksimumga ega: $y(0) = 3$. Funksiya $x = –1$ va $x = 1$ nuqtalarning har birida minimumga ega: $y(– 1) = y(1) = 2$.

Endi, funksiyaning kesmaning chetki nuqtalaridagi qiymatini topamiz:

$y(–2) = (–2)^4 – 2 (– 2)^2 + 3 = 16 – 8 + 3 = 11$; $y(– 2) = 11$, $y(2) = 11$.

Shunday kilib, eng katta qiymat 11 ga, eng kichik qiymat – 2 ga teng:

$\sup\limits_{[-2,2]} y = 11$; $\inf\limits_{[-2,2]} y = 2.$

2-misol

Hajmi 32 m^3 bo’lgan hovuzning asosi kvadrat shaklida. Hovuzning o’lchamlari shunday aniqlansinki, hovuzning devorlari va tubini qoplashga eng oz material sarflansin.

<u>Yechilishi</u>: Asosning tomonlarini x, hovuzning balandligini u bilan belgilaymiz. U xolda, hovuzning hajmi

$V = x^2 y = 32 \Rightarrow y = 32/x^2$.

Qoplash kerak bo’lgan sirt yuzi $S = x^2 + 4xy$ ga teng, yoki $S = x^2 + \dfrac{128}{x}$.

Bu funksini ekstremumga tekshiramiz:

$$S' = 2x - \frac{128}{x^2} \quad \Rightarrow S'' = 2 + \frac{256}{x^3}, \quad S' = 0 \quad \Rightarrow x = 4, \quad S''(4) > 0.$$

Demak, $x = 4$ minimum nuqta. $x \in]0; +\infty[$ bo’lgani uchun $x = 4$ da funksiya eng kichik qiymatga ega.

Javob: $x = 4$ da $y = 2$; $Inf\, S = 48\ m^2$.

3-misol

O’lchami 5×8 bo’lgan to’g’ri turtburchakli tunuka varaqidan *a* shaklda ko’rsatilgandek burchaklarini kvadrat shaklida kesish bilan eng katta hajmli ochik quticha tayyorlansin.

<u>Yechilishi:</u> x bilan kesiladigan kvadrat tomonini belgilaymiz. Umumiy tomon $2x$ ga kamayadi va qutichaning hajmi $V = x(8 – 2x)(5 – 2x) = 4x^3 – 26x^2 + 40x$ ga teng bo’ladi.

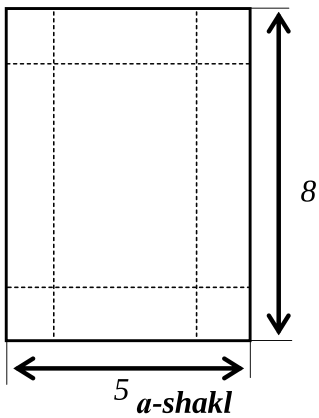
Bundan $0 \le x \le 2{,}5$ bo’lishi kerak (***a-shakl***). Ta’kidlaymizki, chetki nuqtalarda hajm nolga teng bo’ladi. Kritik nuqtalarni topamiz:

$V' = 12x^2 – 52x + 40$; $V' = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $x = 10/3$.

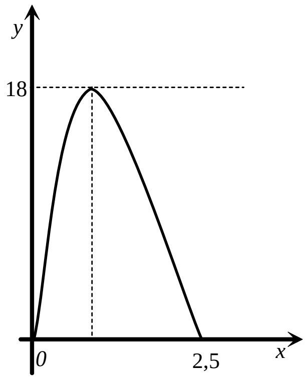
$x = 10/3$ qiymat aniqlanish sohasiga tegishli emas.

x = 1 da hajm maksimal:

$V_{max} = 18$ (***b–shakl***).



a-shakl



б-shakl

4-misol

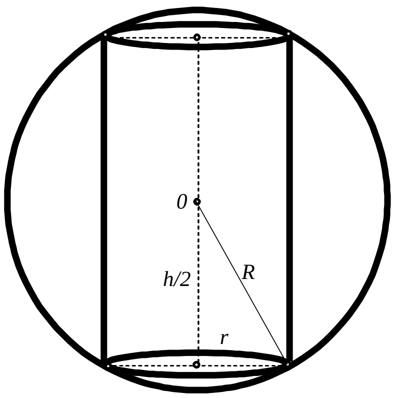
Berilgan sharga ichki chizilgan silindr qanday holda eng katta hajmli bo'ladi?

Yechilishi: R - shar radiusi, r - silindr radiusi, h - silindr balandligi bo'lsin.

Shakldan $h^2/4 + r^2 = R^2$ bo'ladi.

Bu holda $V = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}; h$ -ning o'zgarish sohasi [0; 2R] kesma. Chetki qiymatlarda silindr «*ayniydi*», uning hajmi nolga teng bo'ladi. Kritik nuqtalarni topamiz (V = V(h)):

$$V' = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi R^2; \quad V' = 0 \quad \Rightarrow h^2 = \frac{4}{3}R^3 \quad \Leftrightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}};$$



h ning shu qiymatida hajmning qiymati maksimal bo'ladi.

$$V_{\max} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}R^3 - \pi R^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3.$$

Izoh: O'zgaruvchi deb h - ni emas, balki r ni ham olish mumkin.

Bu holda $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ va $V = 2\pi r^2\sqrt{R^2 - r^2}$ ni qarashga to'g'ri keladi va $V = V(r)$ funksiya tekshiriladi.